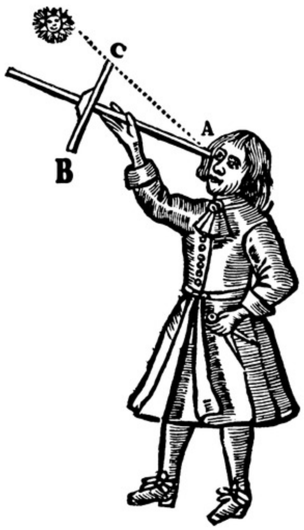
© 2016–2025 MATH4U

Lodní navigace

Již od 15. století byli navigátoři vybaveni mechanickými pomůckami, které jim umožňovaly změřit úhlovou vzdálenost dvou objektů (např. hvězd, Slunce a horizontu nebo význačných bodů na vzdálené pevnině). Z takových pomůcek zde zmíníme např. Jakubovu hůl, astroláb nebo námořní sextant. Jako zajímavost poznamenejme, že i přes své stáří má konkrétně sextant stále své místo jako záloha při náhlém výpadku signálu GPS a dokonce se testuje i jeho potenciální nouzová využitelnost ve vesmíru. NASA ho na Mezinárodní vesmírné stanici testovala jako možnou nouzovou pomůcku pro hluboký vesmír – astronauti zkoušeli, zda dokážou sextantem přesně měřit úhly mezi hvězdami a podle toho určit polohu lodi bez pomoci pozemních systémů. Podobně se i v moderní námořní dopravě doporučuje mít vedle GPS k dispozici klasickou astronomickou navigaci se sextantem jako pojistku pro případ rušení nebo výpadku satelitního signálu.

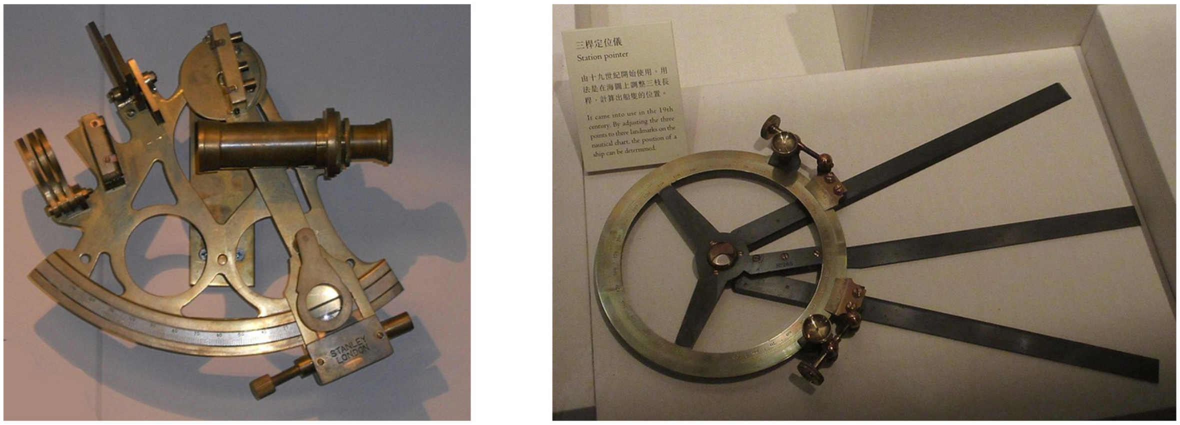
Z dalších navigačních mechanických pomůcek zmiňme např. trojramenný úhloměr, jehož role bude objasněna v poznámce za první úlohou.



Obrázek 1: Jakubova hůl (vlevo) a astroláb (vpravo).

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

© 2016–2025 MATH4U



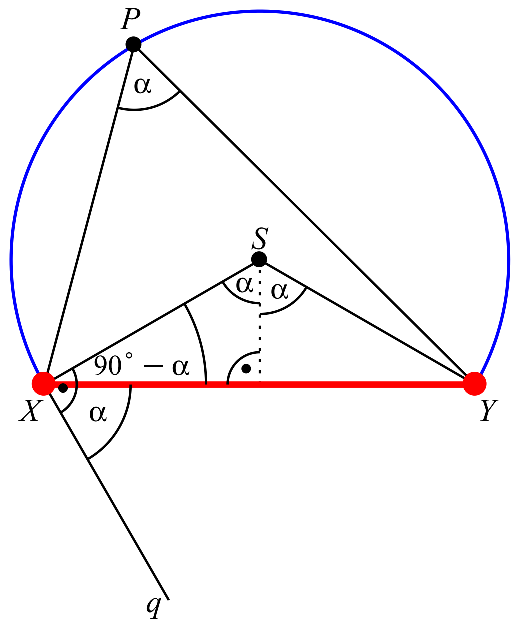
Obrázek 2: Sextant (vlevo) a trojramenný úhloměr (vpravo).

Než se pustíme do řešení úloh, raději si připomeňme, co budeme úhlovou vzdáleností rozumět. Představme si, že pozorovatel nacházející se v bodě P vidí dva objekty X a Y. Pozorovatel pak řekne, že objekty X a Y mají úhlovou vzdálenost α, pokud $|\angle XPY| = \alpha$. Tuto skutečnost budeme zapisovat jako $\theta(X, Y) = \alpha$.

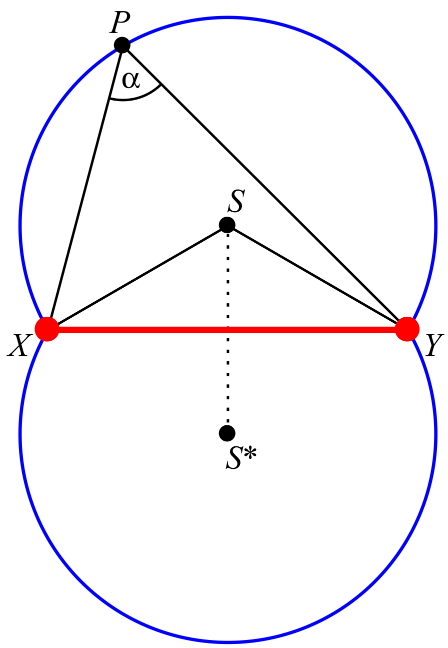
Ke zdárnému vyřešení úloh rovněž potřebujeme vědět, jak vypadá množina bodů v rovině, ze kterých je danou úsečku XY vidět pod daným úhlem α. Z věty o obvodových a středových úhlech vyplývá, že hledanou množinou bodů jsou jisté dva kruhové oblouky (každý z nich se nachází v jedné ze dvou polorovin určených hraniční přímkou XY). Této množině bodů budeme říkat ekvigonála úsečky XY příslušná danému úhlu. Raději si připomeňme, jak se sestrojí jeden ze dvou výše zmíněných oblouků (druhý je pouze symetrickým obrazem prvního podle přímky XY). Chceme-li sestrojit zmíněný oblouk, postupujeme následovně (viz obrázek 3):

- Sestrojíme polopřímku q vycházející z bodu X (mířící do opačné poloroviny, než je ta, ve které chceme oblouk konstruovat), která svírá s úsečkou XY daný úhel α.
- K polopřímce q sestrojíme kolmici v bodě X.
- Sestrojíme osu úsečky XY.
- Průsečík osy úsečky XY a dříve sestrojené kolmice k polopřímce q je střed S kružnice, na které leží hledaný oblouk.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union



Obrázek 3: Popis konstrukce jednoho oblouku ekvigonály



Obrázek 4: Ekvigonála usečky XY příslušná úhlu α

Z jakéhokoliv bodu P, který leží na ekvigonále (s výjimkou bodů X a Y), je úsečka XY vidět pod daným úhlem α, tzn. $|\angle XPY| = \alpha$ (viz obrázek 4).

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.

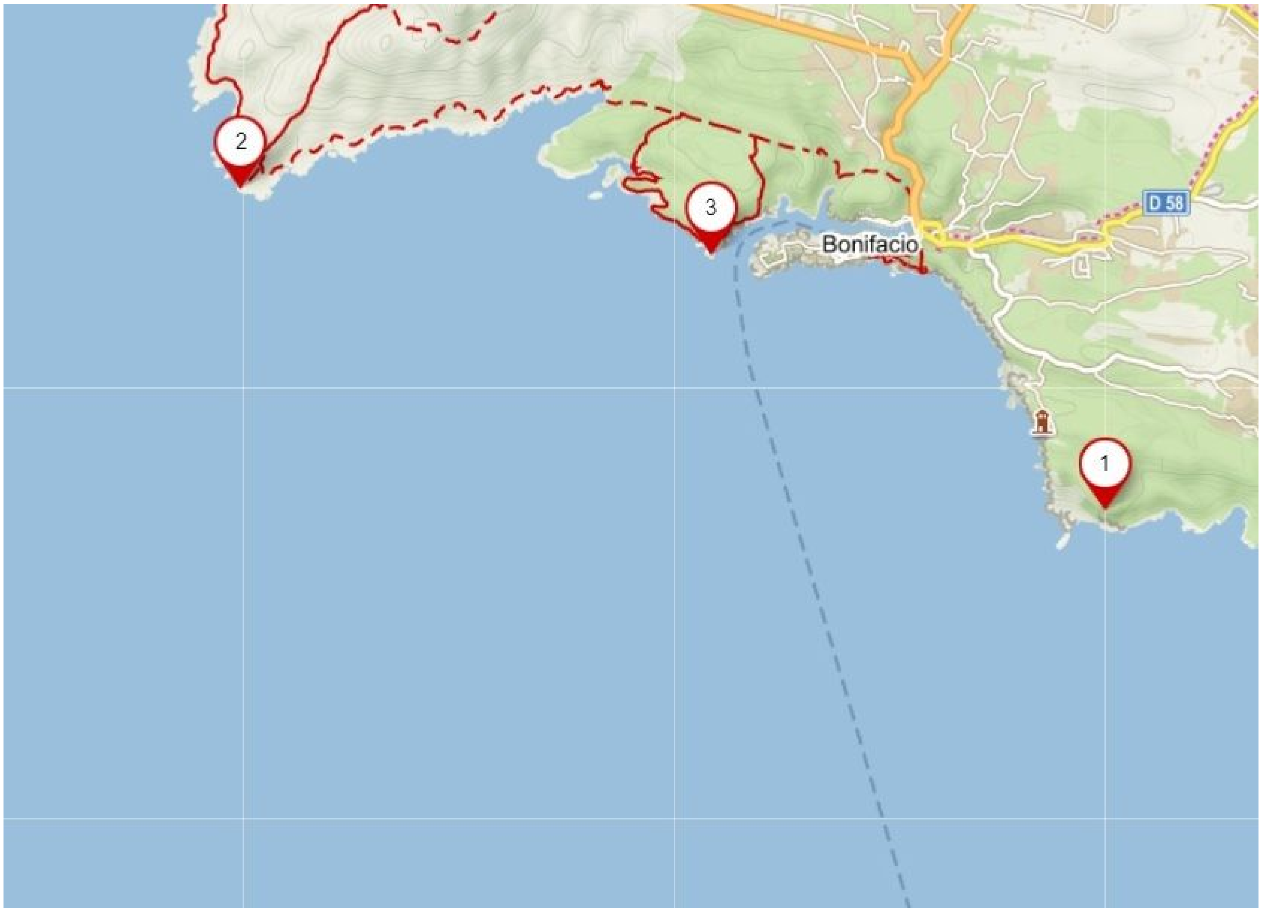
Funded by the European Union

© 2016–2025 MATH4U

Úloha 1. Na mapě jsou vyznačeny polohy tří majáků blízko města Bonifacio na Korsice. Tyto majáky jsou označeny čísly 1, 2 a 3. Kapitán lodi na moři změřil dvě úhlové vzdálenosti θ dvojice majáků následovně:

- $\theta(2,3) = 52°$
- $\theta(1,3) = 35°$

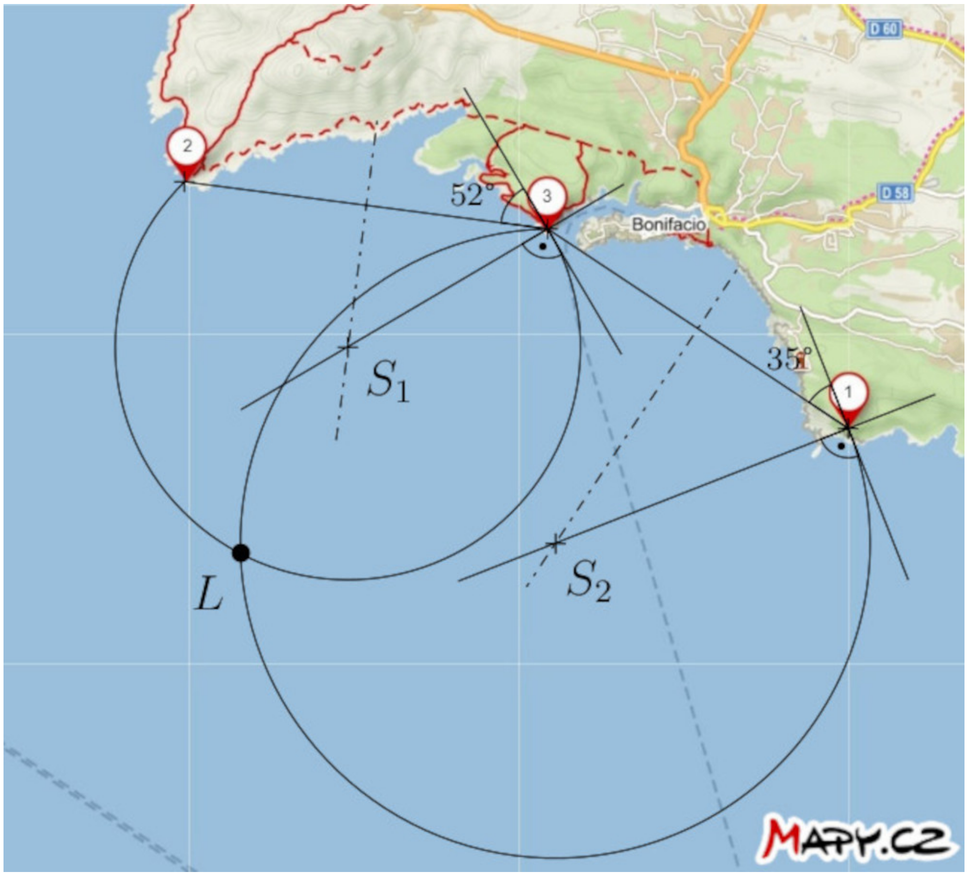
Sestrojte na mapě bod označující polohu lodi v čase měření. Předpokládejme, že měření proběhla rychle za sebou, abychom mohli změnu polohy lodi zanedbat. Rovněž budeme zanedbávat i zakřivení Země.



Obrázek 5: Obrázek k zadání úlohy 1

Řešení. Jestliže úhlová vzdálenost mezi majáky 2 a 3 činí $52°$, nachází se loď někde na ekvigonále (tj. množině bodů v rovině, ze kterých je danou úsečku vidět pod daným úhlem) úsečky s koncovými body 2 a 3 příslušné řečenému úhlu. Podobně se také nachází na ekvigonále úsečky s koncovými body 1 a 3 příslušné úhlu $35°$. Celkem to znamená, že se loď musí nacházet v průsečíku těchto dvou ekvigonál. Z každé ekvigonály přitom bereme v úvahu pouze ten oblouk, který leží ve „smysluplné“ polorovině, tj. polorovině směřující do moře.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union



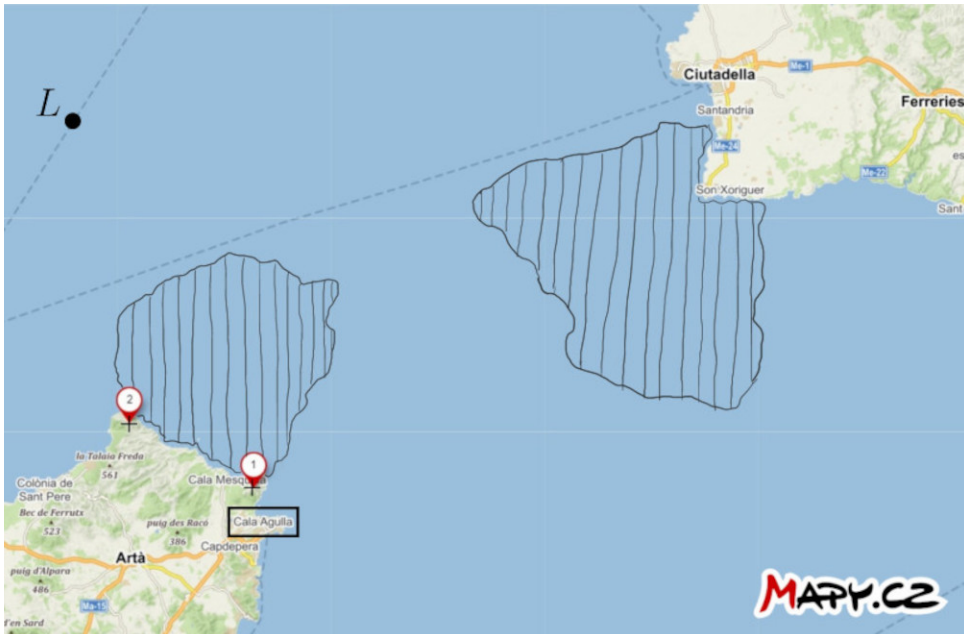
Obrázek 6: Vyřešená úloha 1

▲

Poznámka. Pomůcka, která navigátory zbavila nutnosti konstrukce, je již zmíněný trojramenný úhloměr, jehož tři ramena se nastavila na mapě tak, aby procházela třemi polohami význačných bodů a svírala úhly o naměřených velikostech. Průsečík ramen pak určil polohu lodi na mapě.

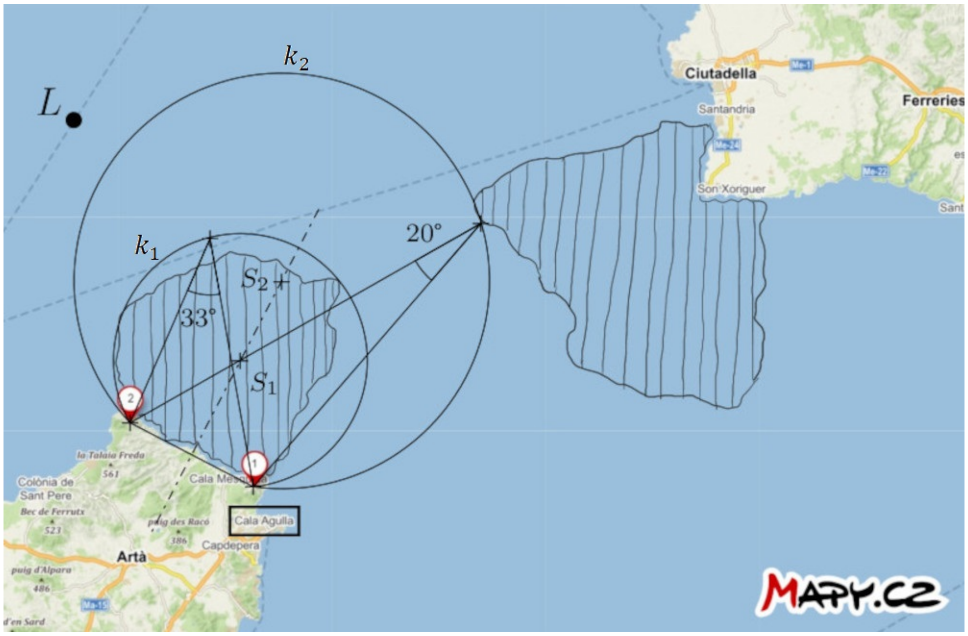
Úloha 2. Na mapě úžiny mezi ostrovy Mallorca a Menorca jsou vyznačeny dva body na pevnině (body 1 a 2) a poloha lodi L. Kromě toho se také na moři nachází dvě oblasti nebezpečných vod, ve kterých se nachází podvodní překážky (vyšrafované oblasti). Najděte způsob, jak proplout lodí nebezpečnými vodami do přístavu Cala Agulla (místo nedaleko bodu 1). Využijte toho, že kapitán lodi umí v libovolném okamžiku změřit úhlovou vzdálenost dvou řečených bodů (tj. bodů 1 a 2).

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union



Obrázek 7: Obrázek k zadání úlohy 2

Řešení. Sestrojme oblouky kružnic k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2, které prochází body 1 a 2 (oba středy tedy leží na ose úsečky s koncovými body 1 a 2) a které mají následující další vlastnost: oblouk kružnice k_1 (se středem S_1) těsně uzavírá přístavu bližší nebezpečnou oblast a oblouk kružnice k_2 (se středem S_2) se dotýká vzdálenější oblasti (viz obrázek 8). Každý z těchto oblouků je přitom podmnožinou nějaké ekvigonály úsečky s krajními body 1 a 2. Změřme nyní obvodové úhly příslušné těmto obloukům – u našeho zadání je to přibližně $33°$ pro oblouk kružnice k_1 a $20°$ pro oblouk kružnice k_2 (opět viz obrázek 8).



Obrázek 8: Vyřešená úloha 2

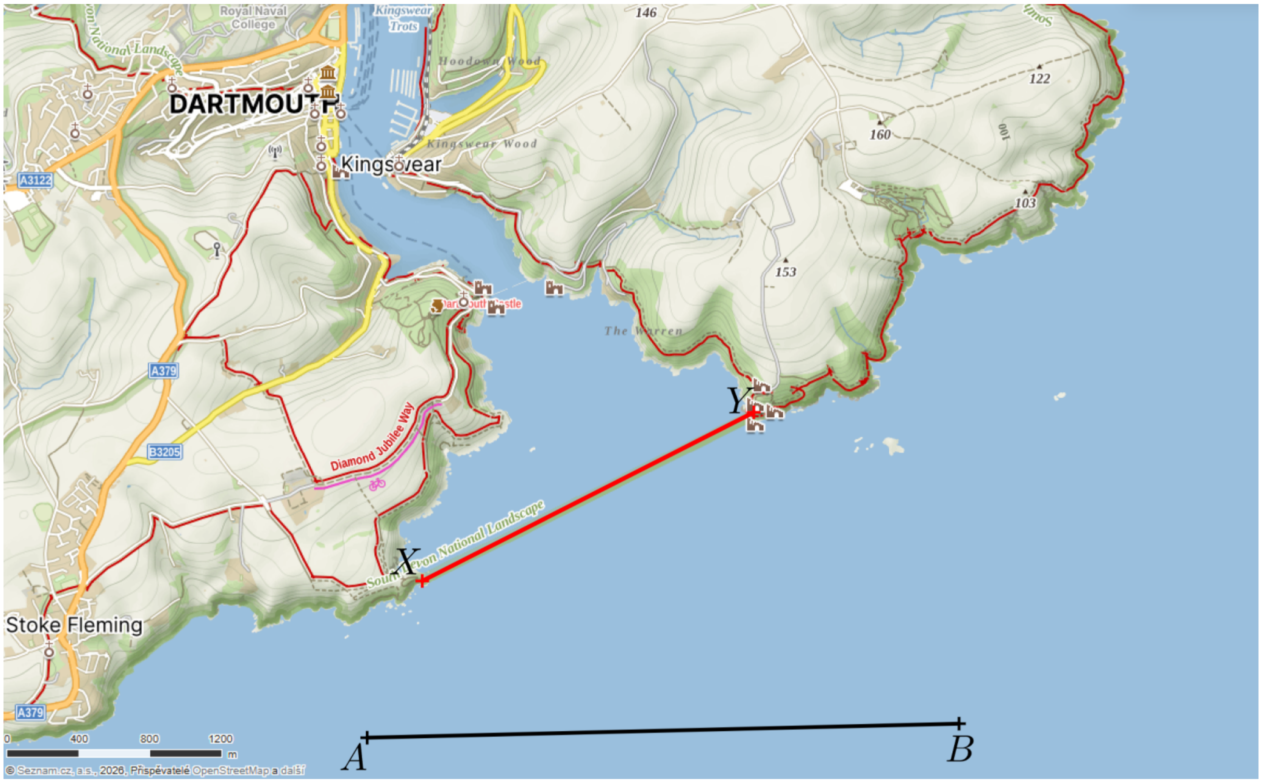
The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Jestliže je úhlová vzdálenost bodů 1 a 2 vzhledem k lodi menší než 33°, můžeme říci, že se loď nachází s jistotou mimo nebezpečnou oblast bližší přístavu. Naopak, jestliže bude řečená úhlová vzdálenost větší než 20°, loď se nachází mimo nebezpečnou oblast vzdálenější přístavu.

Formulujme nyní strategii proplutí: Kapitán lodi zamíří přímou cestou např. k bodu 1 a během plavby měří úhlovou vzdálenost bodů 1 a 2. Až bude tato vzdálenost větší než 20° (ale stále menší než 33°), stočí loď vlevo a obepluje nebezpečné místo tak, že úhlovou vzdálenost obou bodů vzhledem k lodi udržuje mezi 20° a 33°. Tak je zajištěno, že loď zůstane v bezpečné oblasti mezi oběma oblouky.

▲

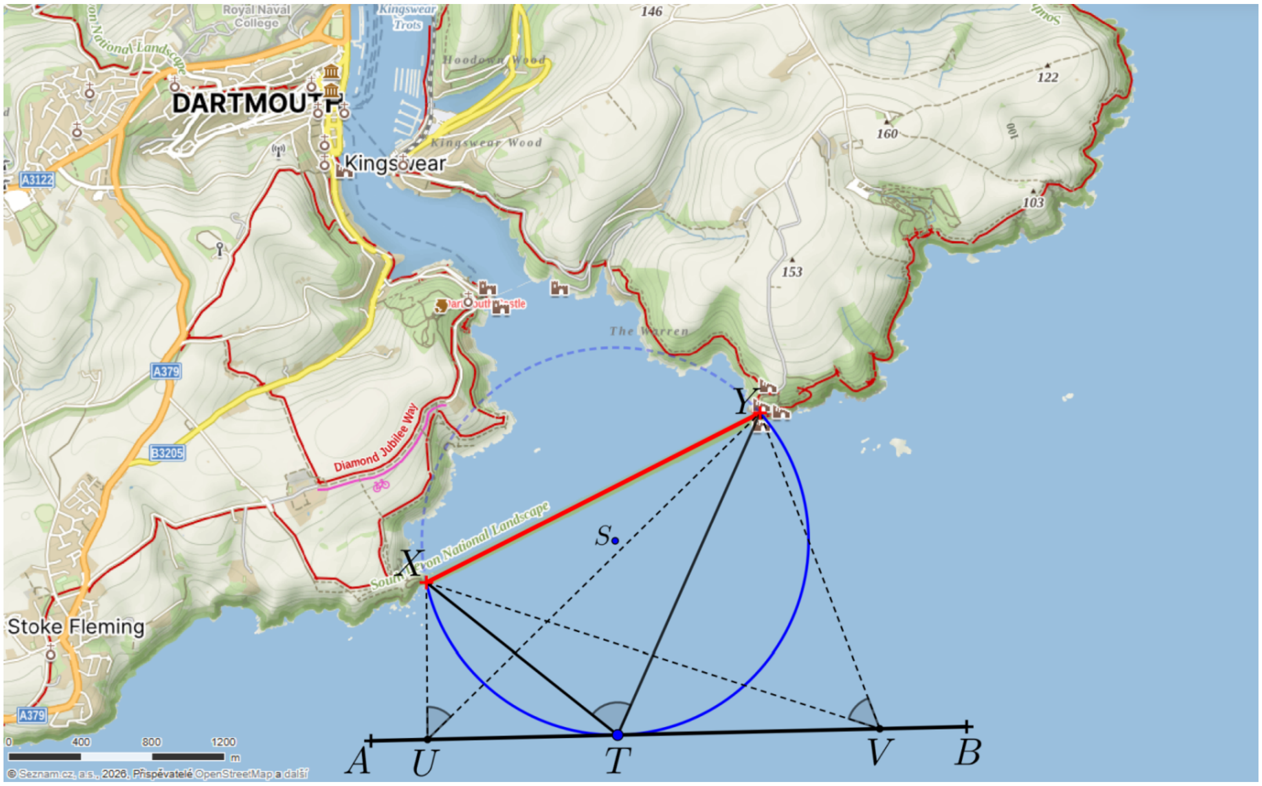
Úloha 3 – Hlídka u vstupu do přístavu. Na mapě je znázorněn vstup do přístavu Dartmouth v Anglii (viz obrázek 9). Úzký kanál, kterým musejí lodě proplout z otevřeného moře do přístavu, je vymezen dvěma body na protilehlých březích, označenými X a Y. Tento úsek XY představuje hlídaný průliv, který chtějí vojáci co nejlépe sledovat. Pobřežní hlídková loď se může pohybovat pouze po přímé trase AB v moři před vstupem do přístavu. Tato trasa AB je na mapě vyznačena jako úsečka. Najděte (geometricky) na trase AB pozici T, ze které může posádka hlídkové lodi pozorovat průliv (úsečku XY) pod největším zorným úhlem.



Obrázek 9: Obrázek k zadání úlohy 3

Řešení. K nalezení požadovaného bodu na úsečce AB stačí najít kružnici, která prochází body X a Y a zároveň se dotýká úsečky AB. Na základě věty o obvodových a středových úhlech si není těžké rozmyslet, že hledaným bodem je právě bod dotyku T (viz obrázek 10). Jakýkoliv bod úsečky AB, který je různý od bodu T (na obrázku 10 jsou pro ilustraci znázorněny dva takové body U a V), totiž leží vně kruhu na obrázku, a proto je z něj úsečka XY vidět pod menším úhlem než z bodu T, tzn. $|\angle XUY| < |\angle XTY|$, $|\angle XVY| < |\angle XTY|$, atd.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union



Obrázek 10: Vyřešená úloha 3

▲

Otázky k zamyšlení (bez počítání)

- Dnes většina lodí používá GPS. Myslíte, že má ještě smysl, aby kapitáni uměli takové geometrické strategie s úhly a mapou? Kdy by se to mohlo hodit v praxi (např. výpadek signálu, porucha zařízení)?
- V úloze 2 kapitán udržuje loď v „bezpečném pásu" mezi dvěma oblouky. Najdete podobný princip v nějaké současné technologii – třeba v asistentech řízení aut, dronů, lyžařských tratích nebo sportovních hrách, kde je potřeba držet se v bezpečném „koridoru"?
- Představte si, že by vám někdo vzal všechny elektronické navigace a nechal vám jen papírovou mapu a možnost měřit úhly mezi dvěma viditelnými body. Jak byste využili to, co jste se naučili v tomto příkladu, při plánování cesty v neznámém terénu nebo na vodě?
- Jak se podle vás liší „navigace s obrazovkou" (kde vidíte svou polohu jako tečku na mapě) a „navigace v hlavě" (kde si musíte představit oblast možných poloh, průniky, bezpečné pásy)?
- V úloze 3 hledáme místo, ze kterého je hlídaný úsek vidět pod největším zorným úhlem. Myslíte, že největší zorný úhel je vždy nejvýhodnější? Uveďte situaci, kdy je větší zorný úhel výhodný, a naopak příklad, kdy by byl menší zorný úhel praktičtější.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

© 2016–2025 MATH4U

Literatura

- Vondrák J. (2013). Historie navigace – od kvadrantu k GNSS. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 58 (1)*, 11–20.
- Sextant – k čemu slouží a jak ho pořídit
- Sextant – podrobnější popis a manuál
- Nasa testing sextant as potential emergency navigation device

Zdroje obrázků

- Jakubova hůl
- Astroláb
- Sextant
- Trojramenný úhloměr

Tento QR kód a odkaz vedou na online verzi tohoto aplikačního příkladu.

Compilation: 10. března 2026, 17:39

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.

Funded by the European Union