Zvědavý skladník

Řešením ryze matematických problémů dostáváme přesné výsledky. Používáme-li však matematiku k řešení problémů světa kolem nás, dosáhneme absolutní přesnosti odpovědi jen zřídka. Přibližnost je někdy způsobena tím, že při svých úvahách reálnou situaci zjednodušíme. Jindy jsou přibližně stanovena už vstupní data (např. měřit délky nebo čas umíme jen s omezenou přesností) nebo je absolutně přesný výsledek reálně nedosažitelný a musí se zaokrouhlit.

Často se v praxi (a také v následujících úlohách) využívá zaokrouhlování na určitý počet platných číslic. Kladné reálné číslo r zaokrouhlíme na n platných číslic následujícím způsobem:

- Vyjádříme r ve tvaru $a \cdot 10^b$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a \in \langle 1, 10)$ a $b \in \mathbb{Z}$, a následně zaokrouhlíme číslo a na $n-1$ desetinných míst podle standardních pravidel pro zaokrouhlování.
- Např. čísla $r = 31{,}258\,16$ a $s = 0{,}023\,123\,6$ zaokrouhlíme na čtyři platné číslice takto:

$$\begin{aligned} r = 31{,}258\,16 = 3{,}125\,816 \cdot 10^1 \quad &\doteq \quad 3{,}126 \cdot 10^1 = 31{,}26 \\ s = 0{,}023\,123\,6 = 2{,}312\,36 \cdot 10^{-2} \quad &\doteq \quad 2{,}312 \cdot 10^{-2} = 0{,}023\,12. \end{aligned}$$

Konkrétně zaokrouhlování vstupních dat může mít překvapivé důsledky pro přesnost výsledku třeba při řešení rovnic, jak se přesvědčíme v následující sérii úloh.

Úloha 1. Vedoucí skladu léčiv obdržel fakturu za objednané dva druhy vakcín. Celkem bylo za dodávku 597 balení vakcín Ixodinum proti encefalitidě a 386 balení vakcín Nopolio proti obrně zaplaceno $401\,950$ Kč. Při vstupní kontrole však bylo zjištěno, že 86 balení vakcíny Ixodinum a 19 balení vakcíny Nopolio je prošlých a musí být vráceny. Při reklamaci prošlých léčiv bylo vráceno $39\,600$ Kč.
Protože vedoucí je zvědavý, chce si spočítat, jaká je nákupní cena jednoho balení obou vakcín. Nemá však po ruce kalkulačku a ani telefon, a proto se spokojí s přibližným řešením. Všechny údaje, které zná, před výpočtem zaokrouhlí na jednu platnou číslici.
Jak moc se bude jeho výsledek lišit od skutečné nákupní ceny? Pro oba druhy vakcín určete absolutní rozdíl vypočítané a skutečné ceny i relativní chybu v procentech.

Řešení. Vyřešme úlohu nejprve bez zaokrouhlování. Označme x cenu za jedno balení Ixodinu a y cenu za jedno balení Nopolio. Informace v zadání vedou na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 597x + 386y &= 401\,950 \\ 86x + \ \ 19y &= 39\,600, \end{aligned}$$

jejímž řešením dostáváme skutečnou nákupní cenu jednoho balení vakcíny Ixodinum 350 Kč a cenu jednoho balení vakcíny Nopolio 500 Kč.

Po zaokrouhlení koeficientů a pravých stran původní soustavy na jednu platnou číslici dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 600x' + 400y' &= 400\,000 \\ 90x' + \ \ 20y' &= 40\,000. \end{aligned}$$

Jejím řešením je dvojice $x' = \frac{1000}{3} \doteq 333$ a $y' = 500$. Porovnáme skutečnou cenu a skladníkův cenový odhad. Dále vypočteme relativní chybu v ceně léčiva, která vznikla zaokrouhlením. Relativní chybu určíme jako podíl absolutní chyby (absolutní hodnoty rozdílu cen) a skutečné ceny balení léku. Výsledky shrneme v tabulce:

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

vakcína	skutečná cena	skladníkův odhad ceny	relativní chyba
Ixodinum	350 Kč	333 Kč	$\frac{350-333}{350} \doteq 4{,}9\,\%$
Nopolio	500 Kč	500 Kč	$\frac{500-500}{500} = 0\,\%$

▲

Úloha 2. Po pár měsících přišla do skladu jiná dodávka, a to 504 balení vakcín Antiflu proti chřipce a 81 balení vakcín Kontradift proti záškrtu. Za tuto dodávku bylo zaplaceno $198\,900$ Kč. Při vstupní kontrole bylo zjištěno, že 98 balení Antiflu a 18 balení Kontradiftu je prošlých. Při jejich reklamaci bylo zpět vráceno $40\,700$ Kč. Vedoucí skladu zopakoval svůj postup a spočítal si od ruky přibližnou nákupní cenu obou léků. Tentokrát se však nestačil divit. Z čeho vycházel jeho údiv a jak moc se jeho výsledek od skutečných cen lišil tentokrát?

Řešení. Úlohu budeme řešit stejně jako předchozí, tentokrát označíme x cenu jednoho balení Antiflu a y cenu jednoho balení Kontradiftu. Tyto skutečné ceny jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} 504x + 81y &= 198\,900 \\ 98x + 18y &= 40\,700, \end{aligned}$$

odkud dostáváme $x = 250$ a $y = 900$.

Po zaokrouhlení koeficientů a pravých stran naší soustavy na jednu platnou číslici dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 500x' + 80y' &= 200\,000 \\ 100x' + 20y' &= 40\,000, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $x' = 400$ a $y' = 0$. Z řešení vedoucího skladu se tedy zdá, že druhá vakcína byla do skladu dodána zadarmo, přitom je ve skutečnosti skoro čtyřikrát dražší než první. Rozdíl mezi skutečnou cenou a skladníkovým odhadem ceny i relativní chybu zaneseme opět do tabulky:

vakcína	skutečná cena	skladníkův odhad ceny	relativní chyba
Antiflu	250 Kč	400 Kč	$\frac{400-250}{250} = 60\,\%$
Kontradift	900 Kč	0 Kč	$\frac{900-0}{900} = 100\,\%$

▲

Úloha 3. Soustavy z obou předchozích úloh znázorněte graficky ve vhodném softwaru. Porovnáním znázornění soustav z úlohy 1 se znázorněním soustav z úlohy 2 vysvětlete rozdíl v přesnostech výsledků obou úloh.

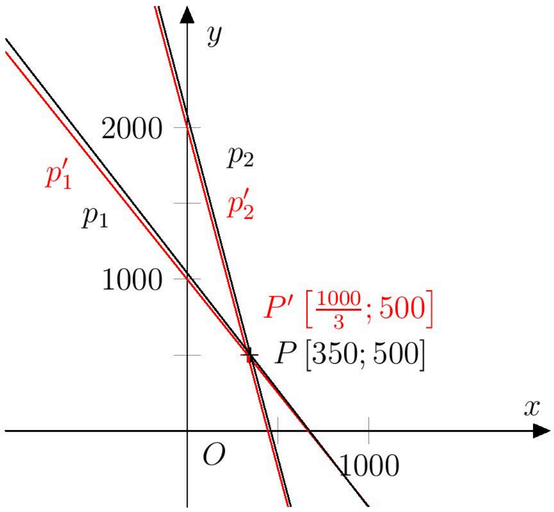
Řešení. Označme p_1, p_2 (resp. q_1, q_2) jednotlivé přímky dané rovnicemi soustavy s nezaokrouhlenými koeficienty v úloze 1 (resp. v úloze 2), jmenovitě

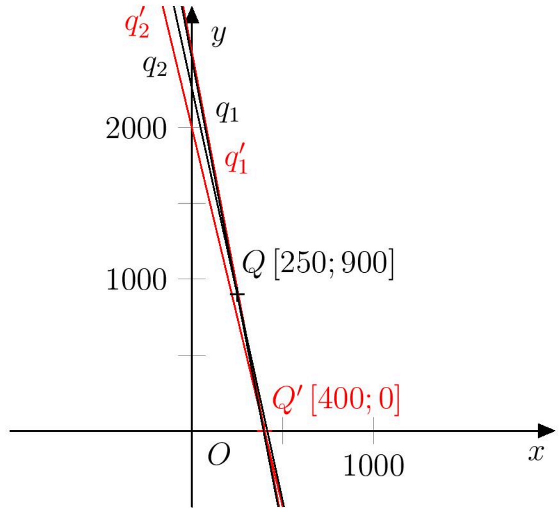
$$\begin{aligned} p_1 &: 597x + 386y = 401\,950 \\ p_2 &: 86x + 19y = 39\,600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &: 504x + 81y = 198\,900 \\ q_2 &: 98x + 18y = 40\,700. \end{aligned}$$

Přímky dané odpovídajícími rovnicemi se zaokrouhlenými koeficienty označme p_1', p_2', q_1' a q_2' a dále označme body $P \in p_1 \cap p_2$, $P' \in p_1' \cap p_2'$, $Q \in q_1 \cap q_2$ a $Q' \in q_1' \cap q_2'$. Grafické znázornění dvojice soustav pro každou úlohu zvlášť je vidět na obrázku.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union





Obrázek 1: Grafické znázornění soustav

Porovnáním obou grafických znázornění je vidět, že v případě úlohy 2 jsou přímky q_1 a q_2 téměř rovnoběžné. Při zaokrouhlování koeficientů rovnice se obecně poloha přímek vůči souřadnému systému mění a tím se mění také poloha jejich průsečíku. Změna polohy průsečíku je přitom daleko větší u přímek, které jsou téměř rovnoběžné. Z obrázku je také vidět, proč bude zaokrouhlením v druhé úloze daleko více ovlivněna druhá souřadnice průsečíku (tj. cena vakcíny Kontradift). Vzhledem ke sklonu přímek q_1 a q_2 by totiž malá změna x-ové souřadnice průsečíku znamenala velkou změnu jeho y-ové souřadnice.

▲

V úloze 2 jsme viděli, že zaokrouhlování vstupních údajů může výrazně změnit výsledek výpočtu. Někdy se změní jen čísla v řešení, jindy se ale změní i samotný charakter soustavy, což uvidíme v následující úloze.

Úloha 4. Pokuste se vymyslet:

1) soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, která má právě jedno řešení, ale po zaokrouhlení koeficientů a pravých stran na jednu platnou číslici vznikne soustava, která má nekonečně mnoho řešení;
2) soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, která má právě jedno řešení, ale po podobném zaokrouhlení (také na jednu platnou číslici) vznikne soustava, která nemá dokonce žádné řešení.

Zkuste se také zamyslet nad tím, jak by mohly vypadat obrázky znázorňující grafické řešení takovýchto soustav. Diskutujte o tom, jak opatrní musíme být, když chceme trochu upravit nebo zaokrouhlit zadaná čísla v rovnicích.

Řešení.

Soustav splňujících zadání existuje nekonečně mnoho.

Příklad první soustavy:

$$
\begin{aligned}
460x + 96y &= 196\,160\\
96x + 16y &= 38\,880
\end{aligned}
$$

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Snadno lze ověřit, že její řešení je $x = 320$ a $y = 510$.

Zaokrouhlená první soustava:

$$\begin{aligned} 500x' + 100y' &= 200\,000 \\ 100x' + \ 20y' &= 40\,000 \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, neboť první rovnice této soustavy je násobkem rovnice druhé. Pokud x' zvolíme libovolně, můžeme například z druhé rovnice dopočítat $y' = 2000 - 5x'$. Pak je jasné, že dvojice $[x'; y']$ je řešením zaokrouhlené soustavy. Protože x' bylo zvoleno libovolně, znamená to, že zaokrouhlená soustava má nekonečně mnoho řešení.

Příklad druhé soustavy:

$$\begin{aligned} 460x + 96y &= 194\,600 \\ 96x + 16y &= 34\,560 \end{aligned}$$

Opět lze snadno ověřit, že tato soustava má jediné řešení $x = 110$ a $y = 1\,500$.

Zaokrouhlená druhá soustava:

$$\begin{aligned} 500x' + 100y' &= 200\,000 \\ 100x' + \ 20y' &= 30\,000 \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení. Důvod je jednoduchý. Pokud totiž druhou rovnici zaokrouhlené soustavy vynásobíme pěti, dostaneme rovnici, která je zřejmě v rozporu s první rovnicí. Proto není možné, aby obě rovnice platily současně.

▲

Otázky k zamyšlení (bez počítání)

- V příběhu vedoucí skladu zaokrouhluje všechna čísla na jednu platnou číslici, aby mohl počítat „z hlavy“. V jakých běžných situacích vám takové hrubé zaokrouhlování dává smysl a kdy už může být nebezpečné?
- V první úloze vyjde cena jedné vakcíny docela přesně, ve druhé úloze je výsledek úplně mimo. Proč podle vás stejný postup „funguje“ v jednom případě celkem dobře a v jiném selže?
- Jak byste slovně vysvětlili spolužákovi, co znamená, že soustava je „citlivá na chybu“ vstupních dat?
- V textu se pracuje s absolutní a relativní chybou. Proč může být v praxi důležitější relativní chyba než absolutní? Najdete příklady, kdy „chyba 50 Kč“ je zanedbatelná a kdy je naopak zásadní?
- Jaké poučení si můžete odnést z příběhu Zvědavého skladníka o používání matematiky v reálném světě – budeme „vždycky věřit výsledku“, nebo spíš „vždycky se ptát, jak přesná byla vstupní data a výpočty“?
- V moderních aplikacích (navigace, fyzikální simulace, statistika, strojové učení) se také pracuje s přibližnými čísly a zaokrouhlováním. Jaká rizika z příběhu se podle vás mohou objevit i v těchto oblastech, jen ve větším měřítku?

Literatura

- Biermann K., Grötschel M., Lutz-Westphal B. (2010). *Besser als Mathe: Moderne angewandte Mathematik aus dem MATHEON zum Mitmachen*. Berlin: Vieweg+Teubner.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Tento QR kód a odkaz vedou na online verzi tohoto aplikačního příkladu.

Compilation: 10. března 2026, 13:41

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union